

Die Aufheizung eines torusförmig begrenzten Plasmas in einem langsam oszillierenden Magnetfeld

Von H. U. SCHMIDT

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München
(Z. Naturforschg. 14 a, 975—989 [1959]; eingegangen am 25. August 1959)

The heating of a plasma confined in a torus in a slowly oscillating magnetic field is investigated by means of a linearized BOLTZMANN-equation for the velocity distribution of the plasma-particles. The periodic solution gives the rates of heating by Gyro-Relaxation, production of sound and acceleration of particles. These rates are somewhat different from the rates in an infinite cylinder of plasma. The comparison of the different mechanisms with each other and with the ohmic heating shows Gyro-Relaxation to be an especially suitable mechanism for achieving extreme temperatures.

In einem oszillierenden Magnetfeld nimmt ein Plasma auch dann Energie auf, wenn die Oszillationsfrequenz klein gegen die Gyrationenfrequenz der Teilchen ist. Diese Energieaufnahme ist als Gyro-Relaxations-Effekt bekannt^{1,2}; sie beruht darauf, daß die gaskinetischen Stöße die mit dem Feld oszillierende Energie der Gyration um die Feldlinien ständig mit der Energie der entkoppelten Bewegung in Feldrichtung auszugleichen trachten. Dieser Prozeß erscheint besonders geeignet zur Aufheizung eines Plasmas, da er einerseits wesentlich niedrigere und damit technisch bequemere Frequenzen als eine Gyrationen-Resonanz-Heizung^{2,3} erfordert und andererseits das kinetische Gleichgewicht des Plasmas nicht so radikal stört, wie das bei einigen anderen Methoden erforderlich ist. So ist z. B. die Heizung durch JOULESCHE Wärme wegen der hohen Leitfähigkeit des Plasmas mit hohen Stromdichten verbunden, die nicht nur unwirtschaftlich sind, sondern auch Instabilitäten hervorrufen⁴.

Für ein Plasma in einem völlig homogenen oszillierenden Magnetfeld ergibt sich eine optimale Energieaufnahme, wenn die Frequenz der Oszillation mindestens gleich der Stoßfrequenz der Teilchen ist¹. Betrachtet man aber ein Modell, bei dem das Magnetfeld nur innerhalb eines gewissen Teilvolumens oszilliert, während das Plasma weiterhin ein unendliches Volumen einnimmt, so erhält man in der Energieaufnahme zusätzlich eine ausgeprägte Resonanz, wenn die Oszillationsfrequenz gleich der mittleren Frequenz ist, mit der thermische Teilchen oder auch Schallwellen das Oszillationsvolumen durchlaufen². Es ist eine offene Frage, welche Energie einem Plasma zugeführt werden kann, wenn es

von einem Magnetfeld auf ein endliches Volumen begrenzt wird und dieses Magnetfeld in einem gewissen Teilvolumen mit geringer Frequenz moduliert ist. Dieses Problem soll im folgenden mit Hilfe der BOLTZMANN-Gleichung behandelt werden.

1. Voraussetzungen und Definitionen

Wir betrachten ein Plasma, das in einem toroidalen Magnetfeld ein torusförmig geschlossenes Volumen mit dem großen Durchmesser $2R$ und einem kleinen Durchmesser $2r_0$, der noch vom Azimut abhängen kann, erfüllen möge. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall:

Zunächst vernachlässigen wir die Toruskrümmung und setzen damit

$$r_0 \ll R \quad (1)$$

voraus. Wir können daher Zylinder-Koordinaten r , φ , z einführen, wobei die Koordinate z mit der Periodizitätslänge $2\pi R$ längs der Torusseule läuft. Der zeitunabhängige Anteil des Magnetfeldes im Torus habe nur eine konstante z -Komponente der Stärke B_0 , gemessen im GAUSSschen System. Auch der oszillierende Anteil besitze im wesentlichen nur eine z -Komponente, die noch von z , aber nicht von r oder φ abhängen möge. Das Gesamtfeld B schreiben wir in der Form:

$$B = B_z = B_0[1 + A(z) \sin \omega t], \quad |A| < 1 \quad (2)$$

$[\omega = \text{Kreisfrequenz und } A(z) = \text{relative örtliche Amplitude der Modulation}]$. Der magnetische Fluß im Plasma $B r_0^2$ sei konstant, so daß r_0 noch von z und t abhängt. Da das Magnetfeld divergenzfrei sein muß,

¹ A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. 12 a, 822 [1957].

² J. M. BERGER et al., Phys. Fluids 1, 301 [1958].

³ K. KÖRPER, Z. Naturforschg. 12 a, 815 [1957].

⁴ T. COOR et al., Phys. Fluids 1, 411 [1958].



setzen wir mit der Vernachlässigung seiner r -Komponente

$$\frac{1}{2} r_0 \left| \frac{d}{dz} A \right| \ll 1 \quad (3)$$

voraus. Das dem Plasma von außen aufgeprägte modulierte Magnetfeld (2) enthält bei Vorgabe der Funktion $A(z)$ keine Freiheiten mehr. Damit vernachlässigen wir Trägheitseffekte im Plasma, nämlich die von der Oszillation angeregten longitudinalen und transversalen hydromagnetischen Wellen. Diese können sich im eingeschwungenen Zustand des Plasmatorus als stehende Wellen ausbilden und wegen ihrer Dämpfung auch die Energieaufnahme des Plasmas erhöhen, aber nur dann, wenn ihre Laufzeiten durch das Plasma nicht wesentlich kleiner als die Oszillationsprodukte sind. Wir setzen mit der Vernachlässigung dieser Wellen also voraus, daß ihre Laufzeiten klein gegen die Oszillationsperiode sind. Aus den Phasengeschwindigkeiten⁵ der beiden Typen folgt für die longitudinale Welle, die den kleinen Durchmesser $2 r_0$ durchläuft,

$$\omega \ll \frac{\pi}{r_0} \left(\frac{B_0^2}{4 \pi \varrho} + \kappa \frac{p}{\varrho} \right)^{1/2} \quad (4a)$$

(ϱ = Massendichte, p = Gasdruck und κ = Verhältnis der spezifischen Wärmen des Plasmas)

und für die transversale ALFVÉN-Welle, die längs der Feldlinie umläuft,

$$\omega \ll \frac{1}{R} \left(\frac{B_0^2}{4 \pi \varrho} \right)^{1/2}. \quad (4b)$$

Schließlich wollen wir annehmen, daß die totale Änderung des Magnetfeldes, die das Einzelteilchen im Plasma erlebt, „adiabatisch“, d. h. langsam im Vergleich zur Gyration des Teilchens verlaufe:

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} \ll \omega_g, \quad \omega_g = e B / m c \quad (5)$$

(ω_g = Winkelgeschwindigkeit der Gyration, e = Ladung, m = Masse des Teilchens, c = Lichtgeschwindigkeit).

Unter dieser Voraussetzung gyriert jedes Teilchen abgesehen vom Einfluß der Stöße mit anderen Teilchen stets um je eine feste Feldlinie und es besitzt ein „adiabatisch“ invariantes magnetisches Moment, das während des freien Fluges im gemäß (5) langsam veränderlichen Feld erhalten bleibt⁶. Dies Moment ist definiert als das Verhältnis von Gyrationse-

nergie zu Feldstärke:

$$\mu = E_g / B = \frac{1}{2} m v_g^2 / B = \text{const.} \quad (6)$$

Dabei ist E_g die Energie der Kreiselbewegung mit der Geschwindigkeit v_g um die Feldlinie und senkrecht zur Feldrichtung,

$$E_g = \frac{m}{2} v_g^2 = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{m}{2} (v^2 - v_z^2). \quad (7)$$

(Wir wählen für Energie und Geschwindigkeit der Bewegung im Ganzen bzw. in z -Richtung die entsprechenden Bezeichnungen E , v , E_z , v_z .)

2. Energieumsatz und Bewegungsgleichungen des Einzelteilchens

Die geladenen Plasmateilchen ändern ihre Energie in dem zeitlich veränderlichen Magnetfeld (2) genau in dem Maße, wie das von der lokalen Änderung des Magnetfeldes induzierte Wirbelfeld Arbeit an ihnen leistet. Dieses elektrische Feld hat nach der ersten MAXWELLSchen Gleichung die Wirbelstärke $\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$ in z -Richtung und ist selbst stets senkrecht zum Magnetfeld gerichtet, wenn wir annehmen, daß es divergenzfrei ist und entsprechend der vorgegebenen Symmetrie auf der z -Achse verschwindet. Daher wirkt das elektrische Feld nur auf die Gyrationbewegung, und wir berechnen die säkulare Energieaufnahme eines Einzelteilchens in dem gemäß (5) langsam veränderlichen Magnetfeld als die mittlere Arbeit des elektrischen Feldes an einem Teilchen, das einen Kreis mit festem Radius r_g und fester Gyrationgeschwindigkeit $v_g = r_g \omega_g$ um eine Feldlinie durchläuft. Bei dieser Bewegung weist der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_g$ für positiv geladene Teilchen dem Vorzeichen der LORENTZ-Kraft entsprechend in die negative z -Richtung. Das Integral der Leistung über einen vollen Umlauf läßt sich mit dem STOKESSchen Satz umformen in ein Flächenintegral über die Wirbelstärke des elektrischen Feldes und liefert für die säkulare Energieänderung des Teilchens im adiabatisch veränderlichen Feld (2):

$$\frac{dE}{dt} = m v \frac{dv}{dt} = \frac{E_g}{B} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (8)$$

Aus der Konstanz des magnetischen Moments (6) und aus Gl. (8) für die Änderung der gesamten Bewegungsenergie folgen zwei weitere Bewegungsgleichungen, einerseits für die Gyration um die Feldlinie

$$\frac{dE_g}{dt} = m v_g \frac{dv_g}{dt} = \frac{E_g}{B} \frac{dB}{dt} = \frac{E_g}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + v_z \frac{\partial B}{\partial z} \right), \quad (9)$$

⁵ L. SPITZER JR., Physics of Fully Ionized Gases. Interscience Publishers, New York 1956.

⁶ F. HERTWECK u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. **12a**, 844 [1957].

andererseits für die Bewegung in Feldrichtung⁵

$$\frac{dE_z}{dt} = m v_z \frac{dv_z}{dt} = - \frac{E_g}{B} v_z \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (10)$$

Dabei ist nach wie vor vom Einfluß der Stöße mit anderen Teilchen abgesehen.

3. Boltzmann-Gleichung

Um die integrale Energieaufnahme des von uns betrachteten Plasmatorus im langsam oszillierenden Magnetfeld (2) aus der Energieaufnahme des Einzelteilchens (8) berechnen zu können, müssen wir die Verteilungsfunktion der Plasmateilchen im Orts- und Geschwindigkeitsraum kennen. Diese Geschwindigkeitsverteilung und die zugehörige Energieaufnahme bestimmen wir getrennt für die Ionen oder auch die Elektronen aus einer BOLTZMANN-Gleichung für gleichartige Teilchen. Über die Wechselwirkung zwischen den beiden Komponenten machen wir dazu einige vereinfachende Annahmen.

Der Einfluß der Stöße zwischen Teilchen verschiedener Sorte auf die Verteilung ist bei großem Massenunterschied und mäßigen Abweichungen vom Gleichgewicht gering, da sie die Bewegungsenergien der Teilchen wesentlich schlechter übertragen als Stöße zwischen gleichen Teilchen. Wir vernachlässigen die entsprechenden Terme in der BOLTZMANN-Gleichung und können den Einfluß der Wechselwirkung durch Stöße als säkulare Angleichung der Temperaturen der Komponenten berücksichtigen.

Wichtiger ist die elektrostatische Wechselwirkung zwischen den Elektronen und den positiven Ionen. Dabei wollen wir die Anregung von Elektronenschwingungen außer Betracht lassen, d. h. die Oszillationsfrequenz als klein gegen die meist sehr hohe Plasmafrequenz voraussetzen. Unter dieser Bedingung zwingt das elektrische Feld das Elektronengas, den Dichteschwankungen der positiven Komponente zu folgen und umgekehrt. Über dieses elektrische Feld können daher auch Druckgradienten und Trägheitskräfte einer Komponente auf die andere zurückwirken. Die Rückwirkung der Trägheitskräfte werden wir im folgenden nicht berücksichtigen. Für die Bewegung der Ionen ist die Trägheit der mit-schwingenden Elektronen ohnehin vernachlässigbar. Nur die Anregung einer systematischen Elektronenbewegung mit starken Dichteschwankungen würde von der Trägheit der Ionen beeinflußt werden. Druckgradienten wirken im Mittel über Strecken von der Ordnung der mittleren freien Weglänge wie eine Volumkraft entgegengesetzter Richtung. Wir

werden daher in der BOLTZMANN-Gleichung der Ionen für den Fall kleiner mittlerer freier Weglängen verglichen mit der Torusdimension R den Druckgradienten der Elektronen zu berücksichtigen haben, um die Anregung von Schallwellen richtig zu beschreiben.

Wir betrachten im folgenden gleichartige Teilchen und halten die Anwendung auf die Ionen oder auch die Elektronen noch offen. In dem Fall adiabatischer Feldänderungen (5), in dem jedes Teilchen bei stoßfreier Bewegung ein konstantes, magnetisches Moment besitzt und nur um eine feste Feldlinie gyrieren kann, genügt es, die Verteilungsfunktion f als eine Funktion der einzigen freien Lagekoordinate z , der zugehörigen Geschwindigkeit v_z , der Gyrationengeschwindigkeit v_g und der Zeit aufzufassen:

$$f = f(z, v_z, v_g, t). \quad (11 a)$$

Das Integral der Funktion f über den gesamten Geschwindigkeitsraum ist die lokale Teilchendichte

$$N = \int f d^3v = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f 2 \pi v_g dv_g dv_z. \quad (11 b)$$

Schließlich definieren wir eine Mittelwertbildung im Geschwindigkeitsraum,

$$\langle a \rangle = \frac{\int a f d^3v}{\int f d^3v}. \quad (11 c)$$

Die integrale Energieaufnahme einer Komponente des Plasmatorus beschreiben wir zweckmäßig durch die Heizrate λ , das Verhältnis der mittleren Energieaufnahme der Teilchen zu ihrer mittleren Energie, wobei die Mittelungen über den ganzen Geschwindigkeitsraum, außerdem über das ganze Torusvolumen und über eine Periode der Oszillation erstreckt werden:

$$\lambda = \frac{\int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi R} \pi r_0^2 N \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle dz dt}{\int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi R} \pi r_0^2 N \langle E \rangle dz dt}. \quad (12)$$

Die Heizrate λ ist der Kehrwert der Zeit, in der sich der Energieinhalt der jeweils betrachteten Plasmakomponente um seine eigene Größenordnung ändert.

Die BOLTZMANN-Gleichung, der die Funktion f genügen muß, lautet:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{dv_z}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{dv_g}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_g} = \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (13)$$

Für die auf der linken Seite auftretenden Beschleunigungen dv_z/dt und dv_g/dt sind die Bewegungsgleichungen (9) und (10) einzusetzen und gegeb-

nenfalls die Wechselwirkung mit der anderen Plasmakomponente.

Das Stoßglied auf der rechten Seite soll die Änderung der Verteilungsfunktion f durch die elastischen Zusammenstöße der Plasmateilchen beschreiben.

Für dieses Glied suchen wir einen vereinfachten in f linearen Ansatz $l(f)$, der folgende Bedingungen erfüllen muß:

1. Die Erhaltung von Teilchenzahl, Impulsvektor und Energie bei jedem Stoß erzwingt, daß die ersten 3 Momente von $l(f)$ im Geschwindigkeitsraum verschwinden:

$$\begin{aligned} \int l(f) d^3v &= 0, \\ \int v l(f) d^3v &= 0, \\ \int v^2 l(f) d^3v &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

(v = Geschwindigkeitsvektor.)

2. Die Stöße trachten lokal stets eine MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung in dem mit der lokal mittleren Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ mitgeführten Bezugssystem herzustellen. Hat diese Verteilungsfunktion sich eingestellt, so wird sie durch die Stöße nicht mehr verändert. Diese Bedingungen werden befriedigt von dem Ansatz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_s}{\partial t} f &= l(f) = -\gamma(f - {}^mf), \\ {}^mf &= N \left(\frac{2\pi}{3} \right)^{-3/2} (\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2)^{-3/2} \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{3}{2} \frac{(v - \langle v \rangle)^2}{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

mf ist im mitgeführten System eine MAXWELL-Verteilung und hat die 3 ersten Momente im Geschwindigkeitsraum mit f gemeinsam. γ (sec^{-1}) ist die mittlere Stoßfrequenz der Teilchen, ihr Kehrwert die Relaxationszeit, in der sich die Verteilung f der Verteilung mf angleicht.

Es sei noch erwähnt, daß der Ansatz (15) auch dem BOLTZMANNschen H -Theorem genügt, d. h. die statistische Wahrscheinlichkeit der Verteilungsfunktion f

$$w(f) \sim \text{const} - \int f \ln f d^3v$$

nimmt nie ab, wenn f sich gemäß (15) ändert:

$$\frac{\partial_s}{\partial t} \left(- \int f \ln f d^3v \right) = \gamma \int (\ln f + 1) (f - {}^mf) d^3v \quad (16)$$

$$= \gamma \int (\ln f - \ln {}^mf) (f - {}^mf) d^3v \geq 0;$$

dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen aus dem Verschwinden der ersten 3 Momente von $f - {}^mf$, wenn man berücksichtigt, daß sich $\ln {}^mf$ darstellen läßt als:

$$\ln {}^mf = a + (b v) + c v^2. \quad (17)$$

Mit (9), (10) und (15) schreiben wir die BOLTZMANN-Gleichung (13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{v_g^2}{2} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} \\ + \frac{v_g}{2} \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + v_z \frac{\partial B}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial v_g} = -\gamma(f - {}^mf). \end{aligned} \quad (18)$$

Sind die mittleren freien Weglängen klein im Vergleich zur Torusdimension R , so ist nach dem oben Gesagten in der BOLTZMANN-Gleichung für die Ionen-Komponente noch der negative Druckgradient der Elektronen als Volumkraft zu berücksichtigen. Für einfach geladene Ionen und kleine Abweichungen vom Gleichgewicht sind die Druckgradienten beider Komponenten etwa gleich. Sie liegen in unserem Fall stets in z -Richtung. Wir erhalten also unter den genannten Bedingungen einen zusätzlichen Summanden

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\int f v_z^2 d^3v}{\int f d^3v} \right) \frac{\partial f}{\partial v_z} \quad (18a)$$

auf der linken Seite von Gl. (18), den wir bei Anregung von Schallwellen zu berücksichtigen haben.

Bevor wir die BOLTZMANN-Gleichung (18) in der Oszillationsamplitude linearisieren und die eingewungene Lösung aufsuchen, um die Energieaufnahme zu bestimmen, wollen wir noch den Zusammenhang herstellen mit den von SCHLÜTER¹ aufgestellten Gleichungen für den Gyro-Relaxationseffekt in einem homogenen oszillierenden Magnetfeld. Wir bilden dazu die Momente der Gl. (18) im Geschwindigkeitsraum mit den Gewichten 1, v_z , v_z^2 bzw. v_g^2 :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} N + \frac{\partial}{\partial z} (N \langle v_z \rangle) - \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial t} N + \frac{\partial B}{\partial z} N \langle v_z \rangle \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} (N \langle v_z \rangle) + \frac{\partial}{\partial z} (N \langle v_z^2 \rangle) - \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial t} N \langle v_z \rangle + \frac{\partial B}{\partial z} N \langle v_z^2 - \frac{1}{2} v_g^2 \rangle \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} (N \langle v_z^2 \rangle) + \frac{\partial}{\partial z} (N \langle v_z^3 \rangle) - \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial t} N \langle v_z^2 \rangle + \frac{\partial B}{\partial z} N \langle v_z^3 - v_z v_g^2 \rangle \right) &= \frac{\gamma}{3} N \langle v_g^2 - 2 v_z^2 \rangle; \\ \frac{\partial}{\partial t} (N \langle v_g^2 \rangle) + \frac{\partial}{\partial z} (N \langle v_z v_g^2 \rangle) - \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial t} N \langle 2 v_\theta^2 \rangle + \frac{\partial B}{\partial z} N \langle 2 v_z v_g^2 \rangle \right) &= -\frac{\gamma}{3} N \langle v_g^2 - 2 v_z^2 \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Diese Momentengleichungen bilden einen Spezialfall der von SCHLÜTER⁷ ausführlich diskutierten allgemeinen Momentengleichungen für ein Plasma im starken Magnetfeld. Die Voraussetzung eines starken Feldes entspricht dabei der Annahme (5), daß alle sonstigen zeitlichen Änderungen langsam gegenüber der Gyrationfrequenz der Teilchen verlaufen sollen.

Das Analogon (19 a) der Kontinuitätsgleichung beschreibt die radiale Kompression der Teilchen im adiabatisch veränderlichen Magnetfeld durch die entsprechenden Änderungen der Teilchendichte N , ohne daß die Koordinaten r und v_r überhaupt auftreten. Der Vergleich mit der gewöhnlichen Kontinuitätsgleichung ergibt

$$\langle v_r \rangle = \frac{-r}{2} \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} \text{ bzw. } \left\langle \frac{d}{dt} \pi r^2 B \right\rangle = 0.$$

Also bleibt der Fluß durch eine in der z -Achse zentrierte Kreisscheibe mit dem Radius der mittleren Teilchenkoordinate r , d. h. der Koordinate des Gyrozentrums des Teilchens, konstant. Das entspricht dem Haften des Teilchens bzw. seines Gyrozentrums an einer bestimmten Feldlinie. Die folgenden Gleichungen repräsentieren eine vereinfachte Impuls- und Energiebilanz. In der letzteren erscheint auf der rechten Seite der Gyro-Relaxationsterm, der den durch die Stöße bedingten Energieausgleich zwischen Gyration und Translation längs der Feldlinien beschreibt und eine Volumenviskosität zur Folge hat.

Vernachlässigen wir in den Gln. (19) die Abhängigkeiten von der z -Koordinate und eliminieren die Teilchendichte N in der Energiebilanz, so liefert diese die Gleichungen der homogenen Gyro-Relaxation¹:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N - \frac{N}{B} \frac{dB}{dt} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \langle v_g^2 \rangle - \frac{\langle v_g^2 \rangle}{B} \frac{dB}{dt} + \frac{\gamma}{3} \langle v_g^2 - 2 v_z^2 \rangle &= 0, \quad (20) \\ \frac{d}{dt} \langle v_z^2 \rangle - \frac{\gamma}{3} \langle v_g^2 - 2 v_z^2 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

4. Linearisierung der Boltzmann-Gleichung

Wir wollen im folgenden nur kleine Amplituden des magnetischen Wechselfeldes (2) betrachten,

$$A \ll 1, \quad (21)$$

und die BOLTZMANN-Gleichung in dieser Amplitude linearisieren. Die Verteilungsfunktion f spalten wir auf in eine ungestörte MAXWELL-Verteilung f_0 und eine in A lineare Störung f_1 .

$$\begin{aligned} f &\approx f_0 + f_1 = N_0 \left(\frac{2\pi}{3} \right)^{-3/2} \\ &\cdot (\langle v^2 \rangle_0)^{-3/2} \exp \left(-\frac{3}{2} \frac{v^2}{\langle v^2 \rangle_0} \right) + f_1(z, v_z, v_g, t). \end{aligned} \quad (22 a)$$

Entsprechend gilt für die Teilchendichte

$$N = N_0 + N_1 = \int f_0 d^3v + \int f_1 d^3v. \quad (22 b)$$

Mit den Definitionen

$$\langle a \rangle_0 = \frac{\int a f_0 d^3v}{\int f_0 d^3v} \text{ und } \langle a \rangle_1 = \frac{\int a f_1 d^3v}{\int f_0 d^3v} \quad (22 c)$$

lautet ein Mittelwert $\langle a \rangle$ in linearer Näherung

$$\langle a \rangle = \langle a \rangle_0 + \langle a \rangle_1 - \langle a \rangle_0 (N_1/N_0). \quad (22 d)$$

Zur Linearisierung des Stoßansatzes entwickeln wir die Funktion ${}^m f$ bis zu Gliedern erster Ordnung in A bzw. f_1/f_0 und erhalten mit den Definitionen (22)

$${}^m f \approx f_0 + {}^m f_1 = f_0 \left[1 + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \frac{v^2}{\langle v^2 \rangle_0} \right) \frac{N_1}{N_0} + \frac{3 v_z \langle v_z \rangle_1}{\langle v^2 \rangle_0} + \left(\frac{v^2}{\langle v^2 \rangle_0} - 1 \right) \frac{3}{2} \frac{\langle v^2 \rangle_1}{\langle v^2 \rangle_0} \right]. \quad (23)$$

Die Verteilung $f_0 + {}^m f_1$ hat wie ${}^m f$ die drei ersten Momente mit f gemeinsam. In (23) ist berücksichtigt, daß in unserer Darstellung der Verteilung nur die z -Komponente von $\langle v \rangle$ auftreten kann, während radiale Bewegungen nur durch die Änderung der Teilchendichte beschrieben werden.

Die linearisierte BOLTZMANN-Gleichung lautet dann

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{v_g^2}{2} \frac{1}{B_0} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{v_g}{2} \frac{1}{B_0} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + v_z \frac{\partial B}{\partial z} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_g} = \gamma (f_1 - {}^m f_1), \quad (24)$$

und wenn die Ableitungen von f_0 nach (22 a) und von B nach (2) ausgeführt werden

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} - \omega A(z) \cos \omega t \frac{3}{2} \frac{v_g^2}{\langle v^2 \rangle_0} f_0 = -\gamma (f_1 - {}^m f_1). \quad (25)$$

⁷ A. SCHLÜTER in J. FABRI et al., Combustion and Propulsion, 3 AGARD Colloquium, p. 525, Pergamon Press, London 1958.

Der Wechselwirkungsterm (18 a), der für kleine mittlere freie Weglängen in (25) auf der linken Seite der Ionen-BOLTZMANN-Gleichung zuzufügen ist, lautet linearisiert

$$+ \frac{2 v_z}{\langle \frac{v^2}{2} \rangle_0} f_0 \frac{\partial}{\partial z} \langle v_z^2 \rangle_1. \quad (25 \text{ a})$$

Der linearisierte Stoßansatz in (25) genügt dem BOLTZMANNschen H -Theorem bis auf Glieder dritter und höherer Ordnung in A , wie ein Vergleich mit (15) zeigt. $\ln(f_0 + {}^m f_1)$ läßt sich nämlich ähnlich wie $\ln {}^m f$ in der Form (17) darstellen, da mit (21) auch ${}^m f_1 \ll f_0$ sein muß.

Die mittlere Energie der Lösungen der linearisierten BOLTZMANN-Gleichung (25) kann nur eine Oszillation mit der Amplitude A , aber kein säkulares Wachstum zeigen, da die Energieaufnahme des Plasmas erst von der Ordnung A^2 ist. Doch beschreibt die in (12) definierte Heizrate λ auch im Mittel über die Lösungen von (25) die säkulare Energieauf-

nahme des Plasmas richtig in der Ordnung A^2 , da dE/dt nach (8) selbst von der Ordnung A ist.

5. Integralgleichungen für die eingeschwungene Lösung

Gl. (25) ist eine lineare inhomogene Integrodifferentialgleichung für die Störverteilung f_1 . Die den Lösungen der homogenen Gleichung entsprechenden freien Schwingungen werden durch das Stoßglied gedämpft und klingen zeitlich wie $\exp(-\gamma t)$ ab. Wir betrachten daher im folgenden nur die sogenannte eingeschwungene Lösung, d. h. die zeitlich streng periodische Lösung, die mit der von außen aufgeprägten Kreisfrequenz ω oszilliert.

Auch die Abhängigkeit von der periodischen Lagekoordinate z läßt sich in einfacher Weise behandeln. Dazu zerlegen wir die Amplitudenfunktion $A(z)$, die das räumliche Profil der Modulation des Magnetfeldes (2) beschreibt, in eine FOURIER-Reihe

$$A(z) = {}^0 A + \sum_{n=1}^{\infty} {}^n A \cos n \frac{z}{R}; \quad {}^0 A = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} A(z) dz; \quad \frac{1}{2} {}^n A = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} A(z) \cos n \frac{z}{R} dz. \quad (26)$$

Die Sinusglieder sind weggelassen, da wir uns der besseren Übersicht wegen auf die praktisch interessanten symmetrischen Profile $A(z) = A(-z)$ beschränken wollen. Wir zerlegen nun die zeitlich und räumlich periodisch eingeschwungene Lösung der Verteilungsfunktion $f_1(v_z, v_g, z, t)$ entsprechend den möglichen raumzeitlichen Phasen in folgender Weise:

$$f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} {}^n A \left({}^n f_{11} \cos \omega t \cos n \frac{z}{R} + {}^n f_{21} \sin \omega t \cos n \frac{z}{R} + {}^n f_{12} \cos \omega t \sin n \frac{z}{R} + {}^n f_{22} \sin \omega t \sin n \frac{z}{R} \right). \quad (27)$$

Es besteht also raumzeitliche Phasengleichheit zwischen f_{11} und $\frac{\partial B}{\partial t}$, f_{21} und B , $-f_{12}$ und $\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial z}$, $-f_{22}$ und $\frac{\partial B}{\partial z}$.

Mit (26) und (23) erhalten wir aus (25) für jedes n ein System von 4 linearen Integralgleichungen für die Koeffizienten ${}^n f_{ik}(v_z, v_g)$ der Zerlegung (27):

$$\begin{aligned} \omega {}^n f_{21} + \frac{n v_z}{R} {}^n f_{12} + \gamma {}^n f_{11} - \gamma \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \frac{v^2}{\langle v^2 \rangle_0} \right) f_0 \frac{1}{N_0} \int {}^n f_{11} d^3 v' - \gamma \left(\frac{v^2}{\langle v^2 \rangle_0} - 1 \right) f_0 \frac{1}{N_0} \int \frac{3}{2} \frac{v'^2}{\langle v^2 \rangle_0} {}^n f_{11} d^3 v' \\ = \omega \frac{3}{2} \frac{v_g^2}{\langle v^2 \rangle_0} f_0, \\ -\omega {}^n f_{11} + \frac{n v_z}{R} {}^n f_{22} + \gamma {}^n f_{21} - \gamma \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \frac{v^2}{\langle v^2 \rangle_0} \right) f_0 \frac{1}{N_0} \int {}^n f_{21} d^3 v' - \gamma \left(\frac{v^2}{\langle v^2 \rangle_0} - 1 \right) f_0 \frac{1}{N_0} \int \frac{3}{2} \frac{v'^2}{\langle v^2 \rangle_0} {}^n f_{21} d^3 v' = 0, \\ \omega {}^n f_{22} - \frac{n v_z}{R} {}^n f_{11} + \gamma {}^n f_{12} - \gamma \frac{3 v_z}{\sqrt{\langle v^2 \rangle_0}} f_0 \frac{1}{N_0} \int {}^n f_{12} \frac{v_z'}{\sqrt{\langle v^2 \rangle_0}} d^3 v' = 0, \\ -\omega {}^n f_{12} - \frac{n v_z}{R} {}^n f_{21} + \gamma {}^n f_{22} - \gamma \frac{3 v_z}{\sqrt{\langle v^2 \rangle_0}} f_0 \frac{1}{N_0} \int {}^n f_{22} \frac{v_z'}{\sqrt{\langle v^2 \rangle_0}} d^3 v' = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Die Symmetrie der äußeren Anregung $A(z) = A(-z)$ hat zur Folge, daß die Teilchendichte und die mittlere Energie ebenfalls symmetrisch, der mittlere Impuls in z -Richtung dagegen antisymmetrisch in bezug

auf z sein müssen. Daher verschwinden die Integrale

$$\int v_z {}^n f_{11} d^3 v = \int {}^n f_{12} d^3 v = \int {}^n f_{12} v^2 d^3 v = 0, \quad (29)$$

die wir in (28) bereits weggelassen haben.

Unter Anwendung der Zerlegungen (26) und (27) können wir auch die räumliche und zeitliche Mittelung der Heizrate λ (12) ausführen. Mit (8), (2), (11), (22), (26) und (27) erhalten wir aus (12) in der Ordnung A^2

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} n \lambda = \frac{\omega}{\int v^2 f_0 d^3v} \left[\frac{0A^2}{2} \int v_g^2 f_{11} d^3v + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nA^2}{4} \int v_g^2 f_{11} d^3v \right]. \quad (30)$$

Zur säkularen Energieaufnahme tragen also nur die $n f_{11}$ der gestörten Verteilung bei, da nur für f_{11} räumliche und zeitliche Phasengleichheit mit dem Arbeit leistenden elektrischen Feld $\sim \partial B / \partial t$ besteht.

Die Integralgleichungen (28) enthalten drei charakteristische Frequenzen: die Kreisfrequenz der äußeren Anregung ω , die mittlere Stoßfrequenz der Teilchen γ und eine mittlere „Durchlauffrequenz“, mit der Teilchen oder Schallwellen eine Strecke von der linearen Größenordnung des betrachteten Torusvolumens durchlaufen. Wir bezeichnen sie mit δ und definieren

$$\delta = \frac{V \langle \frac{2}{3} v^2 \rangle_0}{R} = \frac{V(1/\kappa) v_s}{R} \quad (31)$$

(v_s = Schallgeschwindigkeit, κ = Verhältnis der spezifischen Wärmen = $\frac{5}{3}$ für 3 Freiheitsgrade).

Die hier eingesetzte Beziehung zur Schallgeschwindigkeit ist gültig, wenn der Mittelwert $\langle v^2 \rangle_0$ sich auf einfach geladene Ionen bezieht.

Multiplizieren wir die Gln. (28) mit

$$N_0^{-1} (2\pi/3)^{1/2} \langle v^2 \rangle_0^{3/2},$$

so haben alle Summanden die Dimensionen einer

Frequenz. Neben den 3 charakteristischen Frequenzen ω , γ und δ in der Kombination $n\delta$ treten dann nur noch Größen auf, die sich an Hand von (11) und (22) vollständig durch zwei dimensionslose Variable

$$x = \frac{3}{2} \frac{v_z^2}{\langle v^2 \rangle_0} > 0, \quad y = \frac{3}{2} \frac{v_g^2}{\langle v^2 \rangle_0} > 0 \quad (32)$$

ausdrücken lassen. Wir wollen diese Variablen im folgenden benutzen. Ihre Bedeutung ist einfach, es sind die auf die thermische Energieskala der ungestörten MAXWELL-Verteilung $kT = \frac{2}{3} \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle_0$ (k = BOLTZMANN-Konstante, T = Temperatur) bezogenen Anteile der Bewegungsenergie. Die MAXWELL-Verteilung hat also in dieser Bezeichnung den Exponenten $-(x+y)$. An die Stelle der Verteilungskoeffizienten $n f_{ik}(v_z, v_g)$ treten nun dimensionslose Koeffizienten $n g_{ik}(x, y)$, die wir zweckmäßig auf die ungestörte MAXWELL-Verteilung beziehen:

$$\frac{1}{N_0} n f_{ik} d^3v = \frac{1}{V\pi} n g_{ik} e^{-(x+y)} \frac{1}{\sqrt{x}} dx dy. \quad (33)$$

Der Integration im Geschwindigkeitsraum entspricht eine Integration über x und y , für die wir eine Abkürzung einführen, um unnötig lange Formeln zu vermeiden:

$$\frac{1}{V\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty G(x, y) e^{-(x+y)} \frac{1}{\sqrt{x}} dx dy = \{G(x, y)\}. \quad (34)$$

Die Werte einiger im folgenden vorkommenden Integrale seien explizit angegeben:

$$\{1\} = 1, \quad \{x^m\} = (m - \frac{1}{2}) \{x^{m-1}\}, \\ \{y^m\} = m!, \quad m = 1, 2, \dots \quad (34a)$$

Mit diesen Definitionen nimmt das System der Integralgleichungen (28) in den Variablen x und y folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \omega n g_{21} + n \delta x^{1/2} n g_{12} + \gamma n g_{11} - \gamma (\frac{5}{2} - x - y) \{n g_{11}\} - \gamma [\frac{2}{3}(x+y) - 1] \{(x' + y') n g_{11}\} &= \omega y, \\ -\omega n g_{11} + n \delta x^{1/2} n g_{22} + \gamma n g_{21} - \gamma (\frac{5}{2} - x - y) \{n g_{21}\} - \gamma [\frac{2}{3}(x+y) - 1] \{(x' + y') n g_{21}\} &= 0, \\ \omega n g_{22} - n \delta x^{1/2} n g_{11} + \gamma n g_{12} - \gamma 2 x^{1/2} \{x^{1/2} n g_{12}\} &= 0, \\ -\omega n g_{12} - n \delta x^{1/2} n g_{21} + \gamma n g_{22} - \gamma 2 x^{1/2} \{x^{1/2} n g_{22}\} &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Für die Ionen führt der Wechselwirkungsterm (18a) für kleine mittlere freie Weglängen mit (25a) in den beiden unteren Gleichungen (35) auf der linken Seite zu den zusätzlichen Summanden

$$-n \delta x^{1/2} \{2 x n g_{11}\} \text{ bzw. } -n \delta x^{1/2} \{2 x n g_{21}\}. \quad (35a)$$

Entsprechend erhalten wir die neue Darstellung der Heizrate λ aus (30)

$$\lambda = \frac{2}{3} \omega \left[\frac{0A^2}{2} \{y^0 g_{11}\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0A^2}{4} \{y^n g_{11}\} \right]. \quad (36)$$

6. Näherungslösungen für Verteilungsfunktionen und Heizrate

Die allgemeine Lösung des Systems (35) für beliebige Frequenzen ω , γ und $n\delta$ kann nur durch

numerische Berechnungen gewonnen werden. Das gilt dann ebenfalls für die der Lösung gemäß (36) zugeordnete Heizrate λ . Doch erhält man die wichtigsten Informationen schon aus dem asymptotischen Verhalten der Lösung für extreme Werte der charakteristischen Frequenzen. Dies Verhalten und die zugehörigen Näherungen für die Heizrate λ sollen im folgenden näher untersucht werden. Zwei allgemeine Aussagen über die mögliche Größenordnung der Heizrate seien vorausgeschickt. Einmal kann die Zeitskala λ^{-1} , in der die Plasmaenergie anwächst, auch bei Amplituden von der Ordnung eins, nicht kürzer sein als die Periode der Oszillation $2\pi/\omega$, in der das Plasma einen wesentlichen Teil seiner Energie mit dem Feld austauscht. Damit gilt auch bei kleinen Amplituden für die Summanden in (36)

$${}^n\lambda < \omega {}^nA^2. \quad (36a)$$

Außerdem kann die Zeitskala λ^{-1} nicht kürzer sein als die mittlere Stoßzeit γ^{-1} , wenn die aufgenommene Energie durch Stöße thermalisiert werden soll,

$$\lambda_{\text{therm.}} < \gamma. \quad (36b)$$

Wir untersuchen nun zunächst das asymptotische Verhalten der Lösung von (35) und die zugehörige Heizrate in den Fällen, in denen die mittlere freie Weglänge klein gegen den Torusumfang ist, d. h. $\delta \ll \gamma$.

a) $n\delta \ll \gamma, \omega$

Dieser Fall extrem kleiner Durchlauffrequenz entspricht weitgehend der homogenen Gyro-Relaxation. Die Translation der Teilchen längs der Feldlinien ist so langsam, daß sie viele Oszillationsperioden und Stöße erleben, ohne ihre z -Koordinate wesentlich zu verändern. Vernachlässigen wir die Glieder mit dem Faktor $n\delta$, so erhalten wir durch Integration der Gln. (35) (mit den Gewichten 1, $x+y$ oder $x^{1/2}$) die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \{ {}^ng_{11} \} &= \{ (x+y) {}^ng_{11} \} = \{ x^{1/2} {}^ng_{12} \} = \{ x^{1/2} {}^ng_{22} \} = 0, \\ \{ {}^ng_{21} \} &= 1, \quad \{ (x+y) {}^ng_{21} \} = \frac{5}{2} \end{aligned} \quad (37)$$

und damit die Lösung

$$\begin{aligned} {}^ng_{12} &= {}^ng_{22} = 0, \\ {}^ng_{11} &= \frac{\omega\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \frac{y-2x}{3}, \quad {}^ng_{21} = \frac{\omega^2 y + \gamma^2 \frac{5}{3}(x+y)}{\omega^2 + \gamma^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

g_{11} ist eine durch $\partial B/\partial t$ bedingte Anisotropie, die zu den 3 ersten Momenten nichts beiträgt, g_{21} beschreibt die zu B phasengleiche Kompression.

Die Heizrate errechnet sich zu

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \frac{1}{9} \frac{\gamma}{1 + (\gamma/\omega)^2} \left({}^0A^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^nA^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{9} \frac{\gamma}{1 + (\gamma/\omega)^2} \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} A^2(z) dz. \end{aligned} \quad (39)$$

(Natürlich ist hier wie bei allen Näherungen für λ eine Summation über n nur insoweit zulässig, wie die jeweilige Voraussetzung über $n\delta$ erfüllt ist.) Für den Grenzfall der homogenen Gyro-Relaxation $A(z) = \text{const}$ stimmt die Heizrate λ_a wie zu erwarten mit der von SCHLÜTER¹ bzw. BERGER et al.^{2,8} angegebenen überein.

Da für $n=0$ in den Gln. (35) die Glieder $\sim n\delta$ auf jeden Fall verschwinden, sind die Beziehungen (37) und (38) für die ${}^0g_{ik}$ stets erfüllt. Aus (39) läßt sich daher eine untere Grenze der Heizrate für beliebige ω, γ, δ und $A(z)$ ableiten:

$$\begin{aligned} \lambda &\geq {}^0\lambda = \frac{{}^0A^2}{9} \frac{\gamma}{1 + (\gamma/\omega)^2} \\ &= \frac{1}{9} \frac{\gamma}{1 + (\gamma/\omega)^2} \left(\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} A(z) dz \right)^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Diese Mindestrate entspricht der Gyro-Relaxation im homogenen Anteil des Oszillationsfeldes. Die angegebenen Heizraten (39) und (40) sind sowohl für die Ionen als auch für die Elektronen gültig, da mit der Bewegung in Feldrichtung auch die Wechselwirkung beider Komponenten vernachlässigt werden kann.

b) $n\delta, \omega \ll \gamma$

Bei extrem großer Stoßfrequenz kann die magnetische Oszillation neben der Gyro-Relaxation auch Schall anregen. Wir betrachten in diesem Fall nur die Ionen und berücksichtigen in (35) die starke Koppelung mit den mitbewegten Elektronen durch die Zusatzterme (35a) für die Rückwirkung des Druckgradienten der Elektronen. Die Funktionen ${}^ng_{ik}$ entwickeln wir nach Potenzen von $\omega/\gamma \ll 1$,

$${}^ng_{ik} = {}^ng_{ik,0} + \frac{\omega}{\gamma} {}^ng_{ik,1} + \dots \quad (41)$$

Nach Division durch γ enthalten die Gln. (35) neben ω/γ nur noch das Verhältnis $n\delta/\omega$ als freien Parameter. Sie lassen sich nach den Potenzen von ω/γ aufgliedern. Aus den Gleichungen nullter Ordnung und den gewichteten Integralen der Gleichungen er-

⁸ dort als *collisional heating* bezeichnet.

ster Ordnung erhalten wir die Glieder nullter Ordnung in ω/γ :

$$\begin{aligned} {}^ng_{11,0} &= {}^ng_{22,0} = 0, \\ {}^ng_{21,0} &= \frac{\frac{5}{3}(x+y)}{1-n^2d^2}, \quad {}^ng_{12,0} = -\frac{2nd(\frac{5}{3}x)^{1/2}}{1-n^2d^2}; \\ n^2d^2 &= \frac{5}{3} \left(\frac{n\delta}{\omega} \right)^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Sie beschreiben eine Schallwelle, die durch die zu B phasengleiche Kompression angeregt wird und eine Resonanz zeigt. Wie ein Vergleich mit (31) zeigt, verschwindet der Resonanznenner genau dann, wenn die Anregungsperiode $2\pi/\omega$ mit der Laufzeit einer Schallwelle über eine zu n gehörige Wellenlänge $2\pi R/n$ übereinstimmt. Die Methode zur Gewinnung der Glieder nullter Ordnung läßt sich in der ersten Ordnung analog anwenden und liefert

$$\begin{aligned} {}^ng_{21,1} &= {}^ng_{12,1} = 0, \\ {}^ng_{11,1} &= -\frac{1}{2} \frac{n^2d^2}{1-n^2d^2} + \frac{1}{15} \frac{n^2d^2(1+9n^2d^2)}{(1-n^2d^2)^2} (x+y) \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{1-3n^2d^2}{1-n^2d^2} (y-2x), \quad (43) \\ {}^ng_{22,1} &= \left(\frac{5}{3} x \right)^{1/2} nd \left[\frac{1}{5} \frac{1+9n^2d^2}{(1-n^2d^2)^2} + \frac{1}{10} \frac{5-4(x+y)}{1-n^2d^2} \right]. \end{aligned}$$

Eine Energieaufnahme aus dem anregenden Feld ergibt sich also mit ${}^ng_{11,1}$ erst in der Ordnung ω/γ . Wir erhalten eine Heizrate

$$\lambda_b = \frac{1}{9} \frac{\omega^2}{\gamma} \left({}^0A^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2A^2}{2} \frac{(1-3n^2d^2)^2 + n^2d^2}{(1-n^2d^2)^2} \right); \quad (44)$$

$$n^2d^2 = \frac{5}{3} \left(\frac{n\delta}{\omega} \right)^2.$$

Soweit $n\delta \ll \omega$ ist, stimmt λ_b mit der Näherung λ_a für kleine ω/γ überein, da der Resonanzquotient in der Summe dann herausfällt. Wenn $\omega \ll n\delta$ ist, liefert dieser Quotient einen zusätzlichen Faktor 9. In der unmittelbaren Umgebung der Resonanzstelle versagt die Entwicklung (41), sobald $(1-n^2d^2)^2 \lesssim \omega/\gamma$ ist. In diesem Fall enthalten nämlich $(\omega/\gamma) {}^ng_{11,1}$ und $(\omega/\gamma)^3 {}^ng_{11,3}$ Terme von gleicher Größenordnung. Damit bleibt der Quotient in der Resonanz auf die Größenordnung γ/ω beschränkt, wie es der Abschätzung (36 a) entspricht.

Vergleichen wir die hier für einen Plasmatorus berechnete Energieaufnahme bei Schallanregung mit der von BERGER et al.^{2,9} angegebenen Schallerzeugung in einem unendlichen Plasmazyylinder, so ergeben sich im wesentlichen folgende Unterschiede: Einmal erhalten wir, wie zu erwarten, im begrenzt-

ten Volumen nur scharfe diskrete Resonanzen für die stehende Grundschwingung und ihre Oberwellen, während die Resonanz im Zylinder über einen weiten Frequenzbereich verschmiert ist. Nur die maximalen Heizraten in der Resonanz sind in beiden Fällen von gleicher Größenordnung. Bei Frequenzen unterhalb der Resonanz ist die Heizrate für den Torus um einen Faktor von der Ordnung δ/γ kleiner als für den Zylinder.

c) $n\delta, \gamma \ll \omega$

Wie in den beiden bisher besprochenen Fällen ist auch bei extrem großen Anregungsfrequenzen die Durchlauffrequenz klein gegen mindestens eine der beiden anderen charakteristischen Frequenzen, und damit läßt sich auch hier die gleiche Entwicklungsmethode anwenden, diesmal nach Potenzen von γ/ω mit dem freien Parameter $n\delta/\gamma$,

$${}^ng_{ik} = {}^ng_{ik,0} + \frac{\gamma}{\omega} {}^ng_{ik,1} + \dots \quad (45)$$

In nullter Ordnung existiert nur die mit B phasengleiche Verteilung

$${}^ng_{21,0} = y \quad (46)$$

und aus den Gleichungen erster Ordnung folgt dann

$${}^ng_{11,1} = \frac{y-2x}{3}, \quad {}^ng_{12,1} = \frac{n\delta}{\gamma} x^{1/2} y. \quad (47)$$

Die Heizrate lautet damit

$$\lambda_c = \frac{1}{9} \gamma \left({}^0A^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2A^2}{2} \right) = \frac{1}{9} \gamma \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} A^2(z) dz. \quad (48)$$

λ_c ist also unabhängig von $n\delta/\gamma$ und entspricht der Näherung von λ_a (39) für große ω/γ . Wie diese ist sie sowohl für Ionen wie für Elektronen gültig.

Wir gehen nun zur Behandlung der Grenzfälle über, in denen die Durchlauffrequenz nicht mehr klein gegen mindestens eine der beiden anderen charakteristischen Frequenzen ist. In diesen Fällen lassen sich die Gln. (35) nicht mehr in einfacher Weise entwickeln, da die Glieder mit dem Faktor $n\delta$ die Variable x explizit enthalten. Immerhin ist es möglich, Rückschlüsse auf die Verteilung g_{11} und die Größenordnung der zu erwartenden Heizraten zu ziehen. Zu diesem Zwecke eliminieren wir zunächst aus den 4 Gleichungen (35) und den integrierten Gln. (35, 1) und (35, 2) die ${}^ng_{12}$ und ihre Integrale $\{x^{1/2} {}^ng_{12}\}$. Wir erhalten so zwei Gleichungen, die nur die ${}^ng_{11}$ und deren Integrale $\{ {}^ng_{11} \}$ und $\{(x+y) {}^ng_{11}\}$ enthalten:

* dort als *acoustic heating* bezeichnet.

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\gamma} {}^n g_{11} &= \frac{\left[1 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x\right] \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 (P+y) + \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x\right] \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 (Q+2x)}{\left[1 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x\right]^2 + 4 \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x}, \\ {}^n g_{21} &= \frac{\left[1 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x\right] (P+y) - 2 \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 (Q+2x)}{\left[1 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x\right]^2 + 4 \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x}. \end{aligned} \quad (49)$$

Die Integralterme P und Q lauten

$$\begin{aligned} P &= 2x \frac{\gamma}{\omega} \{ {}^n g_{11} \} + \left(\frac{5}{2} - x - y\right) \left(\frac{\gamma}{\omega} \{ {}^n g_{11} \} - \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \{ {}^n g_{21} \} \right) \\ &\quad + \left(2 \frac{x+y}{3} - 1\right) \left(\frac{\gamma}{\omega} \{ (x+y) {}^n g_{11} \} - \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \{ (x+y) {}^n g_{21} \} \right), \\ Q &= 2x \left(\frac{\gamma}{\omega} \{ {}^n g_{11} \} - \{ {}^n g_{21} \} \right) - \left(\frac{5}{2} - x - y\right) \left(1 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \right) \{ {}^n g_{21} \} - \left(2 \frac{x+y}{3} - 1\right) \left(1 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \right) \{ (x+y) {}^n g_{21} \}. \end{aligned} \quad (50)$$

Die Integration dieser Gleichungen mit den Gewicht 1 und $x+y$ führt auf 4 lineare inhomogene Gleichungen für die g_{i1} und $(x+y) g_{i1}$, mit deren Lösung dann auch die g_{i1} bekannt sind. Diese Integrationen sind aber nicht mehr geschlossen ausführbar, da der Nenner noch von x abhängt. Wir werden im folgenden das asymptotische Verhalten der Gln. (49) bei großen freien Weglängen ($\delta \gg \gamma$) näher untersuchen und die zugehörigen Heizraten abschätzen.

d) $n\delta \gg \gamma, \omega$

Eine extrem große Durchlauffrequenz bedeutet, daß die Teilchen während einer Oszillationsperiode und zwischen zwei Stößen im allgemeinen mehrmals das Torusvolumen durchlaufen. In diesem Fall wird nur der homogene Anteil des Oszillationsfeldes eine normale Gyro-Relaxation mit der Heizrate $\omega \lambda$ (40) hervorrufen, während die Wirkung aller inhomogenen Anteile auf die wenigen Teilchen mit fast verschwindender v_z -Komponente beschränkt bleiben muß. In (49) zeigt sich das darin, daß der Nenner von der Ordnung $(n\delta/\omega)^4 \gg 1$ ist, mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung von $x=0$. In einem Bereich von der ungefähren Ausdehnung

$$x \leq \left(\frac{\omega}{n\delta}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right) \quad (51)$$

wird der Nenner auf einen Rest von der Größenordnung

$$N_d \approx \left(1 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right)^2 \quad (52)$$

beschränkt.

Wir nehmen nun an, die Integrale $\{ {}^n g_{i1} \}$ und $\{ (x+y) {}^n g_{i1} \}$ seien von der Ordnung $\omega/n\delta \ll 1$,

und weisen nach, daß dies mit den Gln. (49) verträglich ist. Mit dieser Annahme können wir die Integralterme P und Q in den Zählern jeweils vernachlässigen. Die Zähler sind dann außerhalb des Bereichs (51) höchstens von der Ordnung $(n\delta/\omega)^2$, also klein von 2. Ordnung gegen den Nenner, innerhalb (51) dagegen unabhängig von $n\delta/\omega$. Für eine Abschätzung der Integrale $\{ {}^n g_{i1} \}$ und $\{ (x+y) {}^n g_{i1} \}$ bis auf Glieder 2. Ordnung in $\omega/n\delta$ können wir daher den Integrationsbereich auf (51) beschränken und im Integranden $x=0$ setzen. Wir erhalten so in Übereinstimmung mit unserer Annahme:

$$\{ {}^n g_{11} \} \approx \frac{1}{2} \{ (x+y) {}^n g_{11} \} \approx \frac{\gamma/\omega}{1 + (\gamma/\omega)^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}{n\delta}, \quad (53)$$

$$\{ {}^n g_{21} \} \approx \frac{1}{2} \{ (x+y) {}^n g_{21} \} \approx \frac{1}{1 + (\gamma/\omega)^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}{n\delta}.$$

Mit der gleichen Methode gewinnen wir eine grobe Abschätzung der Heizrate

$$\lambda_d = \frac{\gamma}{1 + (\gamma/\omega)^2} \left(\frac{0A^2}{9} - \frac{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} n c \frac{nA^2}{n} \right), \quad (54)$$

$$n c \approx \frac{2}{3\sqrt{\pi}}.$$

Die Abweichungen von der Mindestrate $\omega \lambda$ (40) sind also klein von der Ordnung $\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}/\delta$. Das gilt wiederum für die Ionen wie die Elektronen.

e) $n\delta, \omega \gg \gamma$

Bei extrem kleinen Stoßfrequenzen gibt es ähnlich wie in dem entgegengesetzten Fall b) eine Resonanz bei einer Anregungsfrequenz von der Größenordnung δ . Teilchen, die in einer passenden Phase und

Geschwindigkeit in z -Richtung umlaufen, entnehmen dem Oszillationsfeld ständig Energie und werden in z -Richtung beschleunigt. Diese Resonanz können wir wiederum an dem Nenner der Gln. (49) ablesen. Für sehr kleine γ/ω ist er mit $[1 - (n\delta/\omega)^2 x]^2$ normalerweise unabhängig von γ/ω , mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung der Resonanzstelle $x = \omega^2/n^2 \delta^2$. In einem Bereich

$$\frac{\omega^2}{n^2 \delta^2} - \frac{2\gamma\omega}{n^2 \delta^2} \leq x \leq \frac{\omega^2}{n^2 \delta^2} + \frac{2\gamma\omega}{n^2 \delta^2} \quad (55)$$

hat der Nenner den ungefähren Wert

$$N_e \approx 4\gamma^2/\omega^2 \ll 1. \quad (56)$$

Wir nehmen nun in Konsistenz mit der folgenden Abschätzung an, daß die Integrale ${}^n g_{i1}$, $(x+y) {}^n g_{i1}$ von der Ordnung 1 sind. Dann ist der Integralterm P von der Ordnung γ/ω , Q dagegen von der Ordnung 1, und die Gln. (49) lauten in der Näherung für kleine γ/ω

$$\begin{aligned} {}^n g_{11} &= \frac{\omega}{\gamma} \frac{\left[1 + \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x\right] y}{\left[1 - \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x\right]^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x} + \frac{\gamma}{\omega} \frac{\left[1 - \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x\right] (Q+2x)}{\left[1 - \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x\right]^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x}, \\ {}^n g_{21} &= \frac{\left[1 - \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x\right] y}{\left[1 - \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x\right]^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x} - \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \frac{2(Q+2x)}{\left[1 - \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x\right]^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \left(\frac{n\delta}{\omega}\right)^2 x}. \end{aligned} \quad (57)$$

Der 2. Term in (57 a) und der 1. Term in (57 b) haben in der Resonanz eine Nullstelle und sind auch innerhalb des ganzen Bereiches (55) höchstens von der gleichen Größenordnung wie außerhalb. Die entsprechenden Beiträge zu den Integralen sind daher im ersten Fall von der Ordnung $\gamma/\omega \ll 1$, im zweiten von der Ordnung 1. Die beiden übrigen Terme der Gln. (57) haben keine Nullstellen und sind im Resonanzbereich (55) um zwei Ordnungen in ω/γ größer als außerhalb. Für eine Abschätzung der Integralbeiträge dieser Terme können wir daher die Integration auf (55) einengen und im Integranden für x den Resonanzwert $\omega^2/n^2 \delta^2$ einsetzen. Das Ergebnis ist in Übereinstimmung mit unserer Annahme:

$$\begin{aligned} \{{}^n g_{11}\} &\approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega}{n\delta} \exp\{-(\omega/n\delta)^2\} + \frac{\gamma}{\omega} H_1\left(\frac{\omega}{n\delta}\right), \\ \{(x+y) {}^n g_{11}\} &\approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega}{n\delta} \left[\left(\frac{\omega}{n\delta}\right)^2 + 2\right] \\ &\quad \cdot \exp\{-(\omega/n\delta)^2\} + \frac{\gamma}{\omega} H_2\left(\frac{\omega}{n\delta}\right), \\ \{{}^n g_{21}\} &\approx G_1\left(\frac{\omega}{n\delta}\right) + \frac{\gamma}{\omega} \frac{\omega}{n\delta} \\ &\quad \cdot \exp\{-(\omega/n\delta)^2\} K_1\left(\frac{\omega}{n\delta}\right), \\ \{(x+y) {}^n g_{21}\} &\approx G_2\left(\frac{\omega}{n\delta}\right) + \frac{\gamma}{\omega} \frac{\omega}{n\delta} \\ &\quad \cdot \exp\{-(\omega/n\delta)^2\} K_2\left(\frac{\omega}{n\delta}\right). \end{aligned} \quad (58)$$

Die G_i , H_i und K_i sind sämtlich Funktionen von $\omega/n\delta$ allein in der Größenordnung 1.

Die zweiten Terme in Gl. (57), die den Faktor $(Q+2x)$ enthalten, liefern also nur Glieder der Ordnung γ/ω , die wir vernachlässigen. Für die Heizrate erhalten wir in der gleichen Näherung:

$$\lambda_e \approx \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} {}^n A^2 \frac{\omega^2}{n\delta} \exp\{-(\omega/n\delta)^2\}. \quad (59)$$

Bei kleinen und bei größeren $\omega/n\delta$ wird diese Heizrate klein, da dann nur wenige Teilchen der ungestörten Verteilung von der Beschleunigung in z -Richtung erfaßt werden können. In diesen Fällen sind die vernachlässigten Terme der Ordnung γ/ω maßgebend. Die entsprechenden Heizraten haben wir bereits unter d) (54) bzw. unter c) (48) abgeschätzt; sie sind von der Ordnung $\gamma^n A^2$.

Im Frequenzbereich $\omega \approx \delta$ überwiegt die in (59) angegebene Heizrate. Sie entspricht im wesentlichen der von BERGER et al.^{2, 10} angegebenen Energieaufnahme eines unendlichen Plasmazyinders unter sonst gleichen Verhältnissen. Doch ist unter Umständen in beiden Fällen noch eine wesentliche Korrektur anzubringen. Da bei der nach Voraussetzung geringen Stoßfrequenz die aufgenommene Energie gemäß der Bedingung (36 b) nicht notwendig thermalisiert wird, kann die Beschleunigung der Teilchen in Feldrichtung zu einer starken Anisotropie der Verteilungsfunktion führen. In diesem Fall ist die Heizrate (59) zu korrigieren. Dazu berücksichtigen wir die Anisotropie bereits in der ungestörten Verteilung durch Annahme verschiedener „Temperatu-

¹⁰ dort als *transit time heating* bezeichnet.

ren“ für Gyration und Bewegung in Feldrichtung und ersetzen die isotrope MAXWELL-Verteilung f_0 in (24) durch den Ansatz

$$f_a d^3v = N_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{v_z^2}{\langle 2v_z^2 \rangle_a} - \frac{v_g^2}{\langle v_g^2 \rangle_a} \right) \cdot \frac{dv_z}{(2\langle v_z^2 \rangle_a)^{1/2}} \frac{dv_g^2}{\langle v_g^2 \rangle_a},$$

$$\langle v_z^2 \rangle_a + \langle v_g^2 \rangle_a = \langle v^2 \rangle_a = \langle v^2 \rangle_0, \quad (60)$$

$$\frac{\langle v_g^2 \rangle_a}{\langle 2v_z^2 \rangle_a} = \alpha.$$

Die Verteilung f_a hat die gleiche Dichte und mittlere Energie wie die MAXWELL-Verteilung f_0 . Der Parameter α beschreibt die Anisotropie, bei Isotropie hat er den Wert 1, bei erhöhter Energie der Bewegung in Feldrichtung ist er kleiner als 1. Mit diesem Ansatz für die ungestörte Verteilung linearisieren wir die BOLTZMANN-Gleichung wie in Abschnitt 4, wobei wir die säkulare Änderung der anisotropen Verteilung f_a durch Stöße abspalten. Wir erhalten so statt (25) die Gleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} - \omega A(z) \cos \omega t \frac{v_g^2}{\langle v_g^2 \rangle_a} f_a - v_z \frac{dA}{dz} \sin \omega t \frac{v_g^2}{\langle v_g^2 \rangle_a} (1 - \alpha) f_a = -\gamma (f_1 - {}^n f_1), \quad (61)$$

$$\frac{df_a}{dt} = -\gamma (f_a - f_0).$$

Der Rechengang zur Auswertung der ersten Gleichung ist derselbe wie in der bisherigen Rechnung. Es ergibt sich eine Korrektur der Heizrate (59) um einen Faktor $3\alpha^2/(1+2\alpha)$, wenn wir die Definition der mittleren Durchlauffrequenz δ sinngemäß ändern:

$$\lambda_e' \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2\alpha^2}{1+2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n A^2 \frac{\omega^2}{n\delta} \exp \{ -(\omega/n\delta)^2 \};$$

$$\alpha = \frac{\langle v_g^2 \rangle_a}{\langle 2v_z^2 \rangle_a}; \quad \delta = \frac{\sqrt{2\langle v_z^2 \rangle_a}}{R}. \quad (59')$$

Die Energieaufnahme durch Beschleunigung in Feldrichtung wird also mit der gleichzeitig zunehmenden Anisotropie immer schwächer, verglichen mit der Energieaufnahme einer im wesentlichen isotropen Verteilung. Da die am Einzelteilchen angreifende Beschleunigung nach (10) proportional zu v_g^2 und die im Mittel je Periode aufgenommene Energie quadratisch in der Beschleunigungsamplitude ist, wird verständlich, daß diese Reduktion von der Ordnung α^2 ist. Die zweite Gl. (61) werden wir im folgenden zusammen mit (59') benutzen, um die säkulare Änderung der beiden Teiltemperaturen für Gyration und Bewegung in Feldrichtung zu bestimmen.

Die Heizraten (59) bzw. (59') sind für Ionen wie für Elektronen gültig. Eine genauere Bestimmung der Energieaufnahme müßte allerdings noch die Anregung von Ionenoszillationen durch die bevorzugte Beschleunigung von Teilchen einer Komponente berücksichtigen.

f) $n\delta, \gamma \gg \omega$

Diesen formal noch ausstehenden Grenzfall extrem kleiner Oszillationsfrequenz untersuchen wir nicht

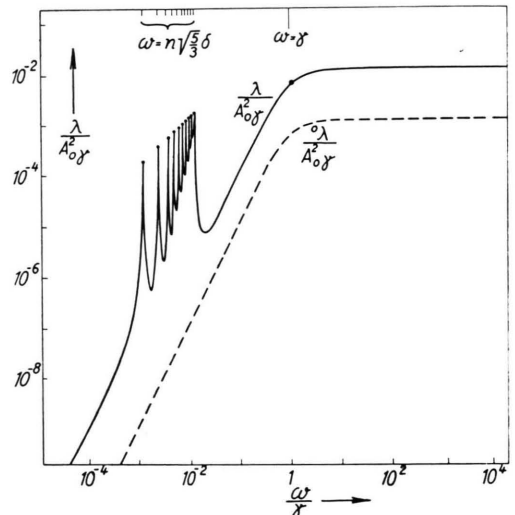


Abb. 1. Normierte Heizraten für kleine mittlere freie Weglängen.

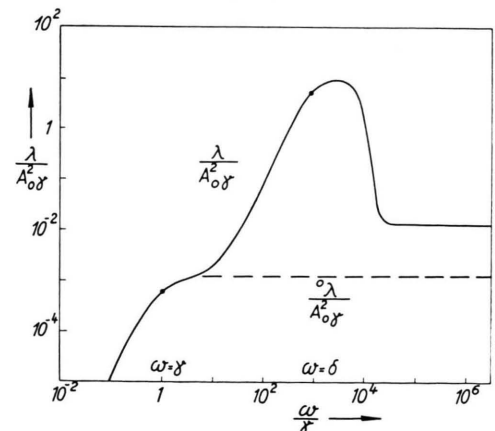


Abb. 2. Normierte Heizraten für große mittlere freie Weglängen.

näher, da λ_d (54) auch für $n\delta \gg \gamma \gg \omega$ und λ_h (44) auch für $\gamma \gg n\delta \gg \omega$ noch gültig sind und bei $n\delta \approx \gamma$ größenordnungsmäßig gleiche Werte liefern. In diesem Gebiet ist kein Resonanzeffekt zu erwarten, da der Nenner in (49) bei kleinen ω von der Form $[(\gamma/\omega)^2 + (n\delta/\omega)^2 x]^2$ ist.

7. Diskussion der Ergebnisse

Es hat sich gezeigt, daß die Energieaufnahme eines Plasmatorus in einem lokal langsam oszillierenden Magnetfeld im allgemeinen der normalen Gyro-Relaxation entspricht. Hinzu kommen ähnlich wie im Fall des unendlichen Zylinders Resonanzerscheinungen bei der Oszillationsfrequenz, die gleich der mittleren Frequenz ist, mit der thermische Teilchen oder Schallwellen das Oszillationsvolumen durchlaufen.

Die errechneten Heizraten der Ionen-Komponente sind für 2 charakteristische Beispiele in den Abb. 1 und 2 dargestellt. Dabei ist die Annahme zugrunde gelegt, daß das Magnetfeld auf einem Zehntel des Torusumfangs mit einer Amplitude A_0 moduliert sei;

$$A(z) = A_0 \quad \text{für} \quad \left| \frac{z}{2\pi R} \right| \leq \frac{1}{20} \quad (62)$$

und sonst 0.

Die Heizraten λ sind in unserer Näherung proportional zu A_0^2 . Wenn wir sie auf die Stoßfrequenz γ beziehen, so hängen sie nur noch von dem Verhältnis der Oszillationskreisfrequenz ω zur Stoßfrequenz und dem Verhältnis der Durchlauffrequenz δ (31) zur Stoßfrequenz ab. Es ist daher zweckmäßig, die normierte Heizrate $\lambda/A_0^2 \gamma$ über der normierten Oszillationsfrequenz ω/γ aufzutragen. Der noch offene Parameter δ/γ beschreibt das Verhältnis von mittlerer freier Weglänge zum großen Torushalbmesser R . Die Abbildungen geben in doppelt logarithmischer Darstellung die normierte Heizrate für zwei typische Werte dieses Verhältnisses δ/γ , Abb. 1 für $\delta = 10^{-3} \gamma$, d. h. für eine relativ kleine mittlere freie Weglänge, und Abb. 2 für $\delta = 10^3 \gamma$, d. h. für eine relativ große mittlere freie Weglänge.

Die Werte der Frequenzen γ und δ für ein Deuteriumplasma seien noch angegeben. Für die Stoßfrequenz der Deuteronen gilt näherungsweise⁵

$$\gamma (\text{sec}^{-1}) \approx n (\text{cm}^{-3}) \cdot [T (^\circ\text{K})]^{-3/2} \quad (63)$$

und für ihre Umlauffrequenz

$$\delta (\text{sec}^{-1}) = \frac{2 \cdot 10^4}{R (\text{cm})} [T (^\circ\text{K})]^{1/2}. \quad (64)$$

Die entsprechenden Werte für die Elektronen sind um einen Faktor ≈ 60 größer. Mit diesen Werten lassen sich auch die numerischen Werte der Heizrate λ und damit der Heizleistung im Plasmavolumen V

$$L_p = \lambda \frac{3}{2} n k T \cdot V \quad (V = 2 \pi^2 R r_0^2) \quad (65)$$

aus den Abbildungen bzw. den Formeln in Abschnitt 6 ablesen.

Die aus der Gyro-Relaxation abgeleitete Mindestheizrate (40) ist in beiden Abbildungen gestrichelt eingetragen. Wenn ε der relative Anteil des Oszillationsvolumens am Gesamtvolumen ist, so ist diese Mindestrate nach (40) um einen Faktor ε^2 kleiner als die Heizrate für eine Oszillation gleicher Amplitude, die das ganze Plasma homogen erfaßt. In unserem Fall ist die Mindestrate also um einen Faktor 10^{-2} kleiner als die Heizrate λ_h einer homogenen Oszillation mit einer konstanten Amplitude A_0 im ganzen Torus,

$$\lambda_h = \frac{A_0^2}{9} \frac{\gamma}{1 + (\gamma/\omega)^2}. \quad (66)$$

Im Fall kleiner mittlerer freier Weglänge wird die Mindestrate $\lambda_h = \varepsilon^2 \lambda_h$ stets überschritten. Bei Frequenzen $\omega \gg \delta$ ist die Gyro-Relaxation ausschlaggebend und liefert eine Heizrate, die linear im Volumenanteil der Oszillation ε und damit um einen Faktor 10 größer als die Mindestrate ist. Im Gebiet $\omega \approx \delta$ werden an etwa $1/\varepsilon$ diskreten Resonanzstellen $\omega = \sqrt{\frac{5}{3}} n \delta$, $n = 1, 2, \dots$, stärkere Schallwellen angeregt. Die Heizrate erreicht nur an diesen Stellen die Größenordnung $\omega A_0^2 \varepsilon^2$. Bei Frequenzen unterhalb dieser Schallresonanz liefern Gyro-Relaxation und Schallheizung zusammen eine Heizrate, die sich um einen Faktor 9ε von (66) unterscheidet. Die Energieaufnahme durch Schallanregung ist also im abgeschlossenen Torus bis auf die unmittelbare Umgebung der Resonanzstellen wesentlich geringer als bei sonst gleichen Verhältnissen in einem unendlich ausgedehnten Zylinder².

Bei großer mittlerer freier Weglänge wird die Mindestrate $\varepsilon^2 \lambda_h$ für alle Frequenzen $\omega \ll \delta$ nicht merklich überschritten. Die Beschleunigung der Teilchen in z -Richtung bei Frequenzen $\omega \approx \delta$ liefert eine Heizrate, die von der Ordnung $\varepsilon^2 \ln(1/\varepsilon) \delta A_0^2$ ist, solange die zugeführte Energie klein ist. Da die zugeführte Energie aber wegen der relativ geringen Stoßfrequenz γ im allgemeinen nicht thermalisiert werden kann, wird die Geschwindigkeitsverteilung zunehmend anisotrop und die mögliche Energiezu-

fuhr geringer. — Bei Frequenzen $\omega \gg \delta$ liefert die Gyro-Relaxation eine Heizrate vom Betrag $\varepsilon \lambda_h$.

Eine optimale Anpassung der Heizung mit langsam oszillierenden Feldern erreichen wir bei den Oszillationsfrequenzen, für die das Verhältnis der Heizleistung im Plasma L_p (65) zu der notwendig auftretenden Verlustleistung in den äußeren Leitern L_v ein relatives Maximum annimmt. Diese Verlustleistung schreiben wir in der Form

$$L_v = \omega \frac{1}{g} \frac{A_0^2 B_0^2}{4\pi} \varepsilon V. \quad (67)$$

Die Kreisgüte g der Anordnung, die durch diese Gleichung definiert ist, wird in den praktisch vorkommenden Fällen im Frequenzbereich von 10^3 bis 10^6 Hertz von der Ordnung 50 sein und erst außerhalb dieses Bereiches abfallen. Nennen wir das Verhältnis von Gasdruck zu magnetischem Druck wie üblich

$$\beta = 8\pi \frac{n k T}{B_0^2}, \quad (68)$$

so folgt für das Verhältnis der beiden Leistungen

$$\frac{L_p}{L_v} \approx \frac{3}{4} \frac{\lambda}{\varepsilon \omega A_0^2} \beta g. \quad (69)$$

Die Stellen optimaler Werte von $\lambda/\varepsilon \omega A_0^2$ sind in den Abb. 1 und 2 durch Punkte gekennzeichnet. Sie fallen für die Gyro-Relaxation auf die Frequenz $\omega = \gamma \sim T^{-3/2}$, für die Schallanregung auf die Resonanzstellen $\omega = \sqrt{\frac{5}{3}} n \delta \sim T^{1/2}$ und für die Beschleunigung in z -Richtung auf $\omega \approx \delta \sim T^{1/2}$. In allen diesen Punkten ist $\lambda/\varepsilon \omega A_0^2$ von der Größenordnung 1 und damit der zugehörige Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{L_p}{L_p + L_v} \approx \frac{\beta g}{1 + \beta g}. \quad (70)$$

Da β für eine gegebene Anordnung linear mit der Temperatur wächst, wird auch die Ankopplung mit zunehmender Temperatur immer besser, wenn die Frequenz jeweils mit $\gamma(T)$ bzw. $\delta(T)$ mitgesteuert wird. Der Vergleich mit der Heizung durch die JOULESche Wärme eines in äußeren Kupferspulen induzierten Stromes fällt mit steigender Temperatur immer günstiger für die Oszillationsheizung aus, da das Leistungsverhältnis für JOULESche Heizung bei gleichem Querschnitt von Kupfer und Plasma

$$\frac{L_{pj}}{L_{vj}} \approx \frac{\sigma_{Cu}}{\sigma_P} \approx \left(\frac{T_0}{T} \right)^{3/2}, \quad T_0 \approx 1,6 \cdot 10^7 \text{ °K}, \quad (71)$$

(σ_{Cu} , σ_P = Leitfähigkeit in Kupfer bzw. Plasma) mit steigender Temperatur immer schlechter wird.

Bei höheren Temperaturen, für die βg größer wird als σ_{Cu}/σ_P , ist also eine ständig optimal angepaßte Oszillationsheizung wirtschaftlicher als die JOULESche Heizung.

Um die erwähnten Arten der Heizung eines Plasmas mit langsam oszillierenden Feldern vergleichen zu können, diskutieren wir die Größenordnung und die Temperaturabhängigkeit der jeweiligen optimalen Ionen-Heizraten λ . Aus (63) und (64) können wir zunächst entnehmen, daß das Verhältnis von mittlerer freier Weglänge zur Torusdimension

$$\delta/\gamma \approx 2 \cdot 10^4 \frac{T^2}{NR} \quad (72)$$

für beide Komponenten gleich ist und quadratisch mit der Temperatur zunimmt. Klein ist dies Verhältnis nur bei relativ niedrigen Temperaturen, also in der Anfangsphase einer Aufheizung. In dieser Phase ist eine optimale Aufheizung durch Gyro-Relaxation bzw. Schallanregung möglich, wenn die Anregungsfrequenz mit der Stoßfrequenz $\gamma \sim T^{-3/2}$ bzw. mit der Schallumlauffrequenz $\sqrt{\frac{5}{3}} \delta \sim T^{1/2}$ säkular mitgesteuert wird. Die Heizrate für die Ionen (39) bzw. (44) sind in beiden Fällen von der Ordnung ωA^2 und gemäß (39) mindestens im Verhältnis der Stoßfrequenzen γ_e/γ_i größer als die der Elektronen. Für die Schallanregung ist die Ionenheizrate bei gleicher Amplitude um einen Faktor δ/γ kleiner als für die Gyro-Relaxation. Dieser Unterschied wird nach (72) mit zunehmender Temperatur rasch geringer, bis die mittlere freie Weglänge größer wird als die Torusdimension. Auch jetzt ist eine optimale Ionen-Heizung mit den säkular mitgeführten Anregungsfrequenzen $\omega \approx \gamma \sim T^{-3/2}$ bzw. $\omega \approx \delta \sim T^{1/2}$ möglich, wobei die Heizraten (54) bzw. (59) zunächst wiederum von der Ordnung ωA^2 sind und die durch Gyro-Relaxation bedingte Aufheizung der Elektronen im Verhältnis γ_e/γ_i bzw. δ_i/γ_e übertreffen. Im Fall der Beschleunigungsheizung (transit time heating) $\omega \approx \delta$ wird die Heizrate der Ionen aber mit zunehmender Anisotropie der Geschwindigkeiten immer kleiner. Führen wir die beiden „Temperaturen“ T_g und T_z für Gyration und Translation in Feldrichtung ein,

$$k T_g = \frac{m}{2} \langle v_g^2 \rangle_a, \quad k T_z = m \langle v_z^2 \rangle_a, \quad (73)$$

so erhalten wir aus (59') mit $\omega = \delta$ und aus der mit dem Gewicht v_g^2 integrierten Gl. (61 a) zwei simultane Gleichungen für die säkulare Änderung von T_g und T_z ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T_z &\approx \delta A^2 T_z \frac{T_g^2}{T_z(T_z + 2 T_g)}, \quad \delta \sim T_z^{-1/2}, \\ \frac{d}{dt} T_g &\approx \gamma T_z, \quad \gamma \sim (T_z + 2 T_g)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (74)$$

Ihre asymptotische Lösung für große T_z/T_g lautet

$$\begin{aligned} T_g/T_0 &= (T_z/T_0)^{1/2}, \\ \frac{1}{T_z} \frac{d}{dt} T_z &= \lambda = \delta A^2 \left(\frac{T_0}{T_z} \right)^{1/2} \sim T_z^{-3/4}; \end{aligned} \quad (75)$$

die Heizrate λ wird also in diesem Fall mit wachsender Energie kleiner und liegt zwischen den Werten $\delta A^2 \sim T_z^{-1/2}$ und $\gamma \sim T_z^{-3/2}$. Die Anisotropie vergrößert sich mit wachsender Energie.

Vergleichen wir die besprochenen Oszillations-Heizmechanismen, so erscheint die Gyro-Relaxation bei Anregung mit der Stoßfrequenz der Ionen $\omega = \gamma_i$ vornehmlich geeignet, um die Ionenkomponente eines Plasmas auf sehr hohe Temperaturen zu bringen, wie sie zur Zündung eines thermonuklearen Fusionsreaktors benötigt werden. Zunächst ist die Gyro-Relaxation bei den anfänglich noch kleinen

mittleren freien Weglängen der Schallanregung mit der Schallumlauffrequenz $\omega = \sqrt{3} \delta$ gegenüber vorteilhafter, da bei gleicher Modulationsamplitude und gleichem Wirkungsgrad eine größere Heizrate und Heizleistung erzielt werden kann, während die Schallanregung überdies eine sehr genaue Anpassung verlangt. Bei großen freien Weglängen ist die Gyro-Relaxation der Teilchenbeschleunigung in Feldrichtung mit der Teilchenumlauffrequenz $\omega = \delta$ überlegen, da diese Beschleunigung das kinetische Gleichgewicht im Plasma nachhaltig stört und eine ständig wachsende Anisotropie der Geschwindigkeitsverteilung erzeugt, die auch die Heizrate reduziert. Schließlich ist es bei optimaler Ausnutzung der Gyro-Relaxation möglich, die Energie bevorzugt den Ionen zuzuführen, da die Heizrate der Elektronen für die gewählte Frequenz im Verhältnis der Stoßfrequenzen kleiner ist als die der Ionen.

Herrn Prof. Dr. A. SCHLÜTER möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit, ihm und Herrn Dr. F. MEYER für zahlreiche fördernde Diskussionen herzlich danken.

Die Raumladungsbremung von Elektronenlawinen*

Von K. J. SCHMIDT-TIEDEMANN**

(Z. Naturforschg. 14 a, 989—994 [1959]; eingegangen am 31. März 1959)

The electric field generated by the positive and negative space charge of a single electron avalanche moving in a homogeneous electric field is calculated. Treating the interaction of the avalanche with its own space charge field as a first order perturbation, a growth formula is obtained which differs markedly from the common TOWNSEND formula. The theoretical results fit well with experimental data on avalanche statistics reported in the literature.

Die Ladungsverteilung in einer Elektronenlawine, welche sich in einem homogenen elektrischen Feld aus einem Elektron entwickelt, wird durch die Elektronen-Stoßionisierung (TOWNSENDScher Ionisierungskoeffizient α) sowie die Drift (Driftgeschwindigkeit v) und Diffusion (Diffusionskoeffizient D) der Elektronen bestimmt. Die positiven Ionen kann man ihrer geringen Beweglichkeit wegen näherungsweise als feststehend betrachten.

Solange das Raumladungsfeld der Lawine gegenüber dem homogenen Feld E_0 vernachlässigbar ist, hängen α , v und D nur von der Gasart, der Gasdichte und der angelegten Feldstärke E_0 ab. Die Elektronendichte besitzt dann die bekannte¹ kugel-

förmige Verteilung mit radialem Dichteabfall entsprechend einer GAUSS-Kurve $\exp(-r^2/r_D^2)$, und die Trägerzahl N wächst exponentiell mit der Zeit, $N(t) \sim \exp(\alpha v t)$.

Bei Lawinen, welche wesentlich über 10^6 Elektronen enthalten, wird der Einfluß des Raumladungsfeldes merklich. Das Feld am Ort des Lawinenkopfes wird durch die Ionen-Raumladung geschwächt, was zu einer Verringerung von α und v führt („Raumladungsbremung“). In erster Näherung ($d^2\alpha/dE^2 = 0$) hat das von den Elektronen erzeugte Feld auf die mittlere Gasverstärkung keinen Einfluß, sondern lediglich auf die Geometrie des Lawinenkopfes.

In der vorliegenden Arbeit werden die Raum-

* Die Anregung zu dieser Untersuchung verdankt der Verfasser seiner früheren Tätigkeit im Institut für Angewandte Physik der Universität Hamburg. Dem Institutsleiter, Herrn Professor Dr. H. RAETHER, sei für die Gewährung der Druckerlaubnis besonders gedankt.

** Jetzt: Philips Zentrallaboratorium Hamburg, Hamburg-Stellingen.

¹ J. S. TOWNSEND, *Electricity in Gases*, Oxford 1915.